סטודנטים יקרים

לפניכם ספר תרגילים בקורס מתמטיקה בדידה. הספר הוא חלק מקורס חדשני וראשון מסוגו בארץ בנושא זה, המועבר ברשת האינטרנט On-line.

הקורס באתר כולל פתרונות מלאים לספר התרגילים, וכן את התיאוריה הרלוונטית לכל נושא ונושא.

הקורס כולו מוגש בסרטוני וידאו המלווים בהסבר קולי, כך שאתם רואים את התהליכים בצורה מובנית, שיטתית ופשוטה, ממש כפי שנעשה בשיעור פרטי, לדוגמה לחצו כאן.

את הקורס בנה מר טל פלדמן, מרצה מבוקש במוסדות אקדמיים שונים ובעל ניסיון עתיר בהוראת המקצוע.

אז אם אתם עסוקים מידי בעבודה, סובלים מלקויות למידה, רוצים להצטיין או פשוט אוהבים ללמוד בשקט בבית, אנחנו מזמינים אתכם לחוויית לימודים יוצאת דופן וחדשה לחלוטין, היכנסו עכשיו לאתר www.gool.co.il.

אנו מאחלים לכם הצלחה מלאה בבחינות

צוות האתר GooL

גול זה בול. בשבילך!

תוכן

תרגילים בנושא לוגיקה

1) רשום את טבלות האמת של הפסוקים הבאים:

א. $(p \wedge q) \vee \neg r$

ב. $\neg(p \wedge q) \to (\neg r)$

ג. $(p \wedge \neg q) \vee r$

ד. $(p \vee q) \to (q \to r)$

2) בטא את שלילת הפסוקים הבאים. (בלי קשר לנכונותם)

א. דוד יפה או ראובן מכוער

ב. האוכל חם וטעים

ג. לכל x קיים y שהוא השורש הריבועי של x

ד. כל תרנגולת כחולה עוזבת את הלול כדי להטיל ביצים.

ה. כל פנתר שהוא ורוד משחק בסרטים מצוירים.

ו. כל פנתר שהוא ורוד קוראים לו יוסי או שהוא משחק בסרטים מצוירים.

ז. כל פנתר שהוא ורוד קוראים לו יוסי וגם הוא משחק בסרטים מצוירים.

ח. לכל נגר קיים אדם שכל רהיטיו יוצרו בידי נגר זה.

ט. אם יהיה יום יפה וגם יהיה לי מצב רוח טוב אז אצא לטיול.

י. אם יהיה יום יפה אז אם יהיה לי מצב רוח טוב אז אצא לטיול.

3) בדוק אלו מזוגות הפסוקים הבאים שקולים לוגית במקרה שהתשובה חיובית הראה זאת הן בעזרת טבלת אמת והן בעזרת עץ שקר

א. $\neg(p \to q)$ $\quad$ $p \wedge (\neg q)$

ב. $(\neg p) \to q$ $\quad$ $p \vee (\neg q)$

ג. $p \to (\neg q)$ $\quad$ $\neg(p \wedge q)$

ד. $(p \vee q) \wedge (\neg q)$ $\quad$ $p \wedge (\neg q)$

ה. $p \leftrightarrow q$ $\quad$ $(p \wedge q) \vee ((\neg p) \wedge (\neg q))$

ו. $(s \to (p \wedge (\neg r))) \wedge ((p \to (r \vee q)) \wedge s)$ $\quad$ $p \vee u$

ז. הראה כי $\neg(r \wedge (p \vee q)) \equiv ((\neg p) \wedge (\neg q)) \vee \neg r$ בעזרת זהויות יסוד.

4) א. הבע את קשר הגרירה בעזרת קבוצת הקשרים $\{\wedge, \neg\}$

ב. הבע את קשר ה- $\vee$ בעזרת קבוצת הקשרים $\{\wedge, \neg\}$

ג. הבע את קשר ה- $\oplus$ (XOR) בעזרת קבוצת הקשרים $\{\wedge, \neg\}$

כתב ופתר - טל פלדמן ©
שיעורים פרטיים לבודדים ולקבוצות 054-7599493

ד. הבע את קשר ה- $\leftrightarrow$ בעזרת קבוצת הקשרים $\{\wedge,\neg\}$

ה. הבע את קשר הגרירה בעזרת קבוצת הקשרים $\{\vee,\neg\}$

ו. הבע את הקשר $\wedge$ בעזרת קבוצת הקשרים $\{\vee,\neg\}$

ז. הבע את קשר ה- $\oplus$ (XOR) בעזרת קבוצת הקשרים $\{\vee,\neg\}$

ח. הבע את קשר ה- $\leftrightarrow$ בעזרת קבוצת הקשרים $\{\vee,\neg\}$

5) יהיו $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta$ הפסוקים הבאים:

$$\alpha_1:(A\vee B)\to(D\to C)$$
$$\alpha_2:B\to\neg(C\wedge A)$$
$$\alpha_3:C\leftrightarrow(A\wedge D)$$
$$\beta:D\vee(B\wedge C)$$

בדקו אלו מהטענות הבאות נכונות והוכיחו.

א. $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\Rightarrow\beta$

ב. β אינה נובעת טאוטולוגית מהפסוקים $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ אך מתיישבת אתם.

ג. β אינה מתיישבת עם הפסוקים $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ כלומר סותרת אתם.

6) הוכח כי הפסוקים הבאים הינם טאוטולוגיות ללא שימוש בטבלת אמת

א. $p\vee(\neg p)$

ב. $p\vee(p\to q)$

ג. $(p\to q)\vee(q\to r)$

ד. $(p\wedge(p\to q))\to q$

ה. $((p\to q)\wedge(q\to r))\to(p\to r)$

ו. $((p\to r)\wedge(q\to r))\to((p\vee q)\to r)$

ז. $(q\vee p\vee r)\to((\neg p)\to((q\vee r)\wedge(\neg p)))$

ח. $((B\to(C\wedge(\sim A)))\wedge(((\sim B)\vee C)\to D)\wedge(E\to(\sim D)))\to(A\to\sim E)$

ט. הוכח בעזרת טבלת אמת שהפסוק $(u\to v)\leftrightarrow((\neg v)\to(\neg u))$ הוא טאוטולוגיה.

י. הוכח כי הפסוק $(u\to v)\leftrightarrow((\neg v)\to(\neg u))\to(((p\to r)\wedge((\neg q)\to p)\wedge(\neg r))\to q)$ הוא טאוטולוגיה.

(מותר לך להסתמך על הסעיף הקודם)

7) בארץ חלם מתקיימת שביתת רופאים במטרה להגדיל את תקציב הבריאות. לפניך ניתוח המצב.

* אם הרופאים לא יסיימו את השביתה אז הנהלות בתי החולים יתערבו.

* אם לא תיפגע בריאותם של החולים אז הממשלה לא תגדיל את הקציב.

* אם הנהלות בתי החולים יתערבו אז לא תפגע בריאותם של החולים או שבית המשפט יתערב.

* בית המשפט לא יתערב וגם הממשלה לא תגדיל את התקציב.

לפתרון מלא בסרטון וידאו היכנסו ל- www.GooL.co.il
כתב ופתר - טל פלדמן ©
שיעורים פרטיים לבודדים ולקבוצות 054-7599493

מסקנה: הרופאים יסיימו את השביתה.

נסמן: D הרופאים יסיימו את השביתה H הנהלות בתי החולים יתערבו. P בית המשפט יתערב

C לא תפגע בריאותם של החולים M הממשלה תגדיל את התקציב.

א. הצרן בעזרת המשתנים המוצעים את טיעון לשפת תחשיב הפסוקים.

ב. בדוק ללא שימוש בטבלת אמת אם הטיעון תקף.

8) בארץ חלם מתקיימות בחירות זרובבל, כתבינו לענייני מפלגות מנתח את המצב:

* אם אבי ייבחר לראשות מפלגת נתיב את דני יפרוש.

* אם שמעון יציע לדני תפקיד אז דני יפרוש.

* אם בני ייבחר לראשות מפלגת פיתה אז שמעון יציע לדני תפקיד או שאבי ייבחר לראשות מפלגת נתיב.

* בני יבחר לראשות מפלגת פיתה.

לכן מסיק כתבינו שדני יפרוש.

סמן: A אבי ייבחר לראשות מפלגת נתיב. B בני יבחר לראשות מפלגת פיתה. C שמעון יציע לדני תפקיד. D דני יפרוש.

הצרן את הטענה לשפת תחשיב הפסוקים והוכח כי המסקנה תקפה.

9) בפרס העתיקה מחליט היזם וייזתא לבנות תיאטרון. אם רוצים שהתיאטרון נגיש לתושבים אז צריך להקימו בלב העיר. אם רוצים שהתיאטרון יהיה רווחי הוא צריך להיות גדול ומרווח כדי שיכיל הרבה אנשים. אבל אם התיאטרון יהיה גדול ומרווח ויבנה בלב העיר אז הוא יעלה 10 מליון זוזים פרסיים. אבל לוייזתא היזם אין 10 מליון זוזים פרסיים לכן מסיק וייזתא היזם כי התיאטרון יוקם במקום לא נגיש לתושבים או שלא יהיה גדול ומרווח.

א. תרגם את ניתוח המצב לשפת הפסוקים תוך שימוש בסימונים הבאים:

N נגיש לתושבים L בלב העיר Y יכיל הרבה אנשים G גדול ומרווח M מחירו יעלה על . . .

R ריווחי

הצרן את ההנחות והמסקנה לשפת הפסוקים בדוק האם המסקנה תקפה ללא שימוש בטבלת אמת.

10) הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות. (כאשר p,q,r פסוקים אטומים)

א. $(p \vee q) \Rightarrow p$

ב. $(p \vee q) \Rightarrow q$

ג. $(p \to q) \Rightarrow q$

ד. $p, p \to q \Rightarrow q$

ה. $(p \to q) \wedge (p \to r) \wedge p \Rightarrow r$

ו. $r \Rightarrow (p \to q) \wedge (p \to r) \wedge p$

ז. $A \to B, C \to B, D \to (A \vee C), D \Rightarrow B$

ח. $(A \vee B \to D), D \to (C \vee P), P \to Q, (\neg C) \wedge (\neg Q) \Rightarrow \neg A$

ט. $(B \to (C \wedge (\sim A)))\ ,\ (((\sim B) \vee C) \to D)\ ,\ (E \to (\sim D)) \models (A \to \sim E)$

11) בסעיפים הבאים α,β,γ פסוקים לאו דווקא אטומים. הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות.

א. אם α סתירה וגם $\alpha \Rightarrow \beta \vee \gamma$ אז $\beta \Rightarrow \neg\gamma$

ב. אם α טאוטולוגיה וגם $\alpha \Rightarrow \beta \vee \gamma$ אז $\neg\beta \Rightarrow \gamma$

ג. אם $\alpha \Rightarrow \beta \vee \gamma$ אז $\left((\alpha \Rightarrow \beta) \vee (\alpha \Rightarrow \gamma)\right)$

ד. אם $\left((\alpha \Rightarrow \beta) \vee (\alpha \Rightarrow \gamma)\right)$ אז $\alpha \Rightarrow \beta \vee \gamma$

ה. אם $\alpha \Rightarrow \beta \wedge \gamma$ אז $\left((\alpha \Rightarrow \beta) \wedge (\alpha \Rightarrow \gamma)\right)$

ו. אם $\left((\alpha \Rightarrow \beta) \wedge (\alpha \Rightarrow \gamma)\right)$ אז $\alpha \Rightarrow \beta \wedge \gamma$

ז. אם $\alpha \Rightarrow (\beta \to \gamma)$ אז $(\alpha \to \beta) \Rightarrow \gamma$

ח. אם $(\alpha \to \beta) \Rightarrow \gamma$ אז $\alpha \Rightarrow (\beta \to \gamma)$

ט. אם $\alpha \vee \beta \Rightarrow \gamma$ אז $(\alpha \Rightarrow \gamma) \vee (\beta \Rightarrow \gamma)$

י. אם $(\alpha \Rightarrow \gamma) \vee (\beta \Rightarrow \gamma)$ אז $\alpha \vee \beta \Rightarrow \gamma$

יא. אם $\alpha \models \beta \to \gamma$ אז $\alpha, \beta \models \gamma$

יב. אם $\alpha \models \beta \to \gamma$ אז $\alpha \vee \beta \models \gamma$

12) עבור α פסוק אטומי או מורכב נגדיר את הקבוצה $F_\alpha = \{\gamma \mid \alpha \Rightarrow \gamma\}$ כלומר F_α היא קבוצת כל הפסוקים שנובעים טאוטולוגית מהפסוק α. הוכח כי $\alpha \equiv \beta$ אם ורק אם $F_\alpha = F_\beta$.

13) לכל אחת מהטענות הבאות קבע האם היא נכונה ורשום את שלילתה ללא שימוש בקשר השלילה. במקרה שהטענה נכונה נמק זאת ובמקרה שהטענה אינה נכונה הבא דוגמה נגדית.

א. $\forall x \in \mathbb{N}\left(\exists y \in \mathbb{N}(x < y)\right)$

ב. $\forall x \in \mathbb{N}\left(\exists y \in \mathbb{N}(x > y)\right)$

ג. $\forall x, y \in \mathbb{R}(x > y) \to \exists z \in \mathbb{R}(x > y + z)$

ד. $\forall x \in \mathbb{R}(x > 0) \to \left(\exists n \in \mathbb{N}\left(x > \tfrac{1}{n}\right)\right)$

ה. $\forall x \in \mathbb{R}\left(x \neq 0 \to \forall y \in \mathbb{Z} \exists z \in \mathbb{R}(xz = y)\right)$

ו. $\forall x \in \mathbb{N}\left(x \geq 1 \to \forall y \in \mathbb{N} \exists z \in \mathbb{N}(xz = y)\right)$

ז. $\forall x \in \mathbb{R}\left(x > 0 \to \exists y \in \mathbb{N}(xy > 1)\right)$

ח. $\forall x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R}(xy = x \wedge x + y < 5) \to y < 4\tfrac{1}{2}$

ט. $\forall x\in\mathbb{R}\left((x>0)\rightarrow\forall y\in\mathbb{R}\left(\exists n\in\mathbb{N}(nx>y)\right)\right)$

14) הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות. במקרה של הפרכה הדגם עולם דיון מתאים עבורו הטענה לא מתקיימת והסבר מדוע הטענה לא מתקיימת. כמו כן רשום גם את שלילה של כל טענה כאשר הקשר $\neg$ מופיע רק לצד פרדיקטים

א. $\forall x\,P(x)\rightarrow\exists x\;P(x)$

ב. $\exists x\,P(x)\rightarrow\forall x\;P(x)$

ג. $\left(\forall x\left(P(x)\wedge Q(x)\right)\right)\rightarrow\left(\forall x\,P(x)\wedge\forall x\,Q(x)\right)$

ד. $\left(\forall x\,P(x)\wedge\forall x\,Q(x)\right)\rightarrow\left(\forall x\left(P(x)\wedge Q(x)\right)\right)$

ה. $\left(\forall x\left(P(x)\vee Q(x)\right)\right)\rightarrow\left(\forall x\,P(x)\vee\forall x\,Q(x)\right)$

ו. $\left(\forall x\,P(x)\vee\forall x\,Q(x)\right)\rightarrow\left(\forall x\left(P(x)\vee Q(x)\right)\right)$

ז. $\left(\exists x\left(P(x)\wedge Q(x)\right)\right)\rightarrow\left(\exists x\,P(x)\wedge\exists x\,Q(x)\right)$

ח. $\left(\exists x\,P(x)\wedge\exists x\,Q(x)\right)\rightarrow\left(\exists x\left(P(x)\wedge Q(x)\right)\right)$

ט. $\left(\exists x\left(P(x)\vee Q(x)\right)\right)\rightarrow\left(\exists x\,P(x)\vee\exists x\,Q(x)\right)$

י. $\left(\exists x\,P(x)\vee\exists x\,Q(x)\right)\rightarrow\left(\exists x\left(P(x)\vee Q(x)\right)\right)$

15) נסמן

$P(x): x^2-8x+15=0$

$Q(x): x\ is\ odd$

$R(x): x>0$

$L(x): x^2+2x+2=0$

בעולם הדיון $\mathbb{Z}$. הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות.

א. $\forall x\left[P(x)\rightarrow Q(x)\right]$

ב. $\forall x\left[Q(x)\rightarrow P(x)\right]$

ג. $\exists x\left[P(x)\rightarrow Q(x)\right]$

ד. $\exists x\left[Q(x)\rightarrow P(x)\right]$

ה. $\forall x\left[L(x)\rightarrow Q(x)\right]$

ו. $\exists x\left[L(x)\rightarrow Q(x)\right]$

ז. $\exists x\left[R(x)\rightarrow P(x)\right]$

ח. $\forall x\left(\neg Q(x)\rightarrow\neg P(x)\right)$

ט. $\forall x\left[\left(P(x)\vee Q(x)\right)\rightarrow R(x)\right]$

י. $\exists x\left[P(x)\to\left(Q(x)\wedge R(x)\right)\right]$

יא. $\forall x\left[P(x)\to\left(Q(x)\wedge R(x)\right)\right]$

נפנה עתה למספר שאלות בהצרנות. בכל השאלות מותר להשתמש ב- סימני משתנים: x,y,z סימני קבוצה: $A,B,C,\cdots,\mathbb{N},\mathbb{Z},\mathbb{Q},\mathbb{R}$ סוגריים, קשרים, כמתים ופרדיקטים: $\subseteq,\ \in\ ,=,\neq,\forall,\ \exists,\ \wedge,\ \vee,\ \rightarrow,\ \leftrightarrow,\ (\ ,)<,>,$

וכן סימנים נוספים הנתונים בגוף השאלה.

<u>שימו לב: אסור להשתמש בקשר השלילה</u> ואין להשתמש בסימן $\notin$!!!

16) הצרן כל אחת מהטענות הבאות.

א. לכל מספר ממשי אין עוקב מיידי. הכוונה שאין מספר ראשון מייד אחריו.

ב. אין קבוצה שמכילה את כל הקבוצות. מותר כאן להשתמש בסימן $\notin$.

ג. לכל מספר שאינו ראשוני יש לפחות שני מחלקים שונים. כאן גם מותר להשתמש בסימן קבוצה P עבור קבוצת המספרים הראשוניים ובסימן $\notin$.

ד. למספר הטבעי הכי גדול אין מחלקים. (ברור שאין כזה אבל צריך רק להצרין.)

ה. לא כל מספר טבעי הוא ראשוני.

ו. כל קבוצה אינה שקולה לקבוצת החזקה שלה.

ז. לכל שני מספרים טבעיים שונים יש מחלק משותף.

ח. בכל קבוצה בת לפחות שלושה איברים שונים אין איבר מקסימלי.

ט. לא בכל תת קבוצה של ממשים יש איבר מינימלי

י. תהי פונקציה $f:X\to Y$. נגדיר את הפונקציה $G:P(X)\to P(Y)$ באופן הבא:

$$G(B)=\left\{x\in X\,\middle|\,f(x)\in B\right\}$$

הצרין את הטענה: אם f על אז G ח.ח.ע.

השתמשי רק בסימנים הבאים:

סימני משתנים: x,y,B,C סימני קבוצות: X,Y סימן פונקציה: f

סוגריים, קשרים, כמתים ופרדיקטים: $\in\ ,=,\forall,\ \exists,\ \wedge,\ \vee,\ \rightarrow,\ \leftrightarrow,\ (\ ,)\subseteq,$

<u>שימו לב: אסור להשתמש בסימנים G ו P. יש להשתמש בהגדרותיהם כדי להחליפם בסימנים אחרים.</u>

יא. לכל מספר ממשי יש לכל היותר שני מספרים ממשיים שונים זה מזה שריבועם שווה לו.

יב. הצרינו את הטענה: לכל פונקציה $f:A\to B$ לכל פונקציה $g:B\to A$ אם $g\circ f=Id_A$ אז f היא על.

מותר להשתמש בסימנים הבאים ורק בהם. סימני משתנים $x_1,x_2,\cdots$ קשרים $\rightarrow,\leftrightarrow,\wedge,\vee$

והסימנים $\exists,\forall,(,),\in,\ A^B,B^A,f,g$ ולמען הסר ספק אסור להשתמש ב- d_A ואסור ב- $\circ$

יג. מספר ראשוני הוא מספר טבעי גדול מאחד שמחלקיו היחידים הם הוא עצמו ו-1. 1הצרינו א הטענה הבאה:

לכל מספר טבעי, בתחום שבין המספר עצמו לפעמיים המספר (כולל קצוות) יש לפחות מספר ראשוני אחד.

מותר להשתמש אך ורק בסימנים הבאים: סימני משתנים $x_1, x_2, \cdots$ קשרים $\leftrightarrow, \leftrightarrow, \wedge, \vee$

והסימנים $\exists, \forall, (,), \in, \mathbb{N}, \leq, 1, 2, 3, \cdots, =, |$ הסימן $|$ פירושו מחלק.

יד. הצרינו את הטענה הבאה: בקבוצה A יש לכל היותר שני מספרים טבעיים. השתמשו רק בסינמנים הבאים: סימני משתנים x, y, z סימני קבוצות $A, \mathbb{N}$ וכן סוגריים, קשרים, כמתים, ופרדיקטים: $\exists, \forall, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, (,), \in, \notin, \neq, =$

טו. הצרינו את הטענה לא תמיד נכון שאם $A \subseteq B$ אז $A \sim B$

מותר להשתמש רק בסימנים הבאים: סימני קבוצות A, B (מותר לצרף אותם לקבוצה בחזקת קבוצה)

סוגריים, קשרים, כמתים, ופרדיקטים: $\exists, \forall, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, (,), \in, \neq, =$ אין להשתמש בקשר השלילה

טז. הצרינו את הטענה הבאה: קבוצת הפונקציות החח"ע מהממשיים לטבעיים אינה ריקה.

השתמשו רק בסימנים הבאים: סימני משתנים x, y סימני קבוצות $\mathbb{R}, \mathbb{N}$ (וצרופי חזקות שלהן)

סימני פונקציות f, g סוגריים, קשרים, וכמתים: $\exists, \forall, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, (,), \{,\}, \in, \neq, =$.

יז. הצרינו את כלל הכפל של אי שוויון ממשי (קטן או שווה) במספר ממשי שונה מאפס.

מותר להשתמש אך ורק בסימנים הבאים: סימני משתנים $x_1, x_2, \cdots$ קשרים $\leftrightarrow, \leftrightarrow, \wedge, \vee$

והסימנים $\forall, (,), \in, \mathbb{R}, \leq, 0$ דוגמה לכלל הזה היא: מאי השוויון $\pi \leq 3.14$ (ע"י כפל במינוס חצי לקבל את אי השוויון $-0.5\pi \leq -1.57$.

17) נתונה הקבוצה $\left\{x \in \mathbb{R} \middle| \forall y\left[\left(y \in \{t \in \mathbb{N} | t > 3\} \rightarrow (y > x)\right)\right]\right\}$ כתוב אותה בצורה $\{x \in \mathbb{R} | ....\}$ כך שבאגף ימין לא יופיע אף משתנה חוץ מ- x.

18) תאר במדויק את הקבוצה: $A = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| \exists y \in \mathbb{N} \ \left(x = y^2\right) \rightarrow (x > 2)\right\} - \left\{x \in \mathbb{R} \middle| |x| > 1\right\}$

19) הוכח כי ההנחה A גוררת טאוטולוגית את המסקנה $\neg(\neg A)$ בעזרת כללי ההיסק הבאים:

1) $\Rightarrow p \rightarrow p$

2) $p \Rightarrow q \rightarrow p$

3) $p \rightarrow q \ , \ p \rightarrow (\neg q) \Rightarrow \neg p$

לפתרון מלא בסרטון וידאו היכנסו ל- www.GooL.co.il
כתב ופתר - טל פלדמן ©
שיעורים פרטיים לבודדים ולקבוצות 054-7599493

20) הוכח בעזרת ההנחות

$$B \vee D$$
$$C \rightarrow B$$
$$D \rightarrow (A \vee C)$$
$$\neg B$$

את המסקנה A מותר להשתמש רק בכללי ההיסק הבאים:

$$P \Rightarrow Q \vee P$$
$$P \wedge Q \Rightarrow P$$
$$P \wedge Q \Rightarrow Q$$
$$P \rightarrow Q, Q \rightarrow R \Rightarrow P \rightarrow R$$
$$P, P \rightarrow Q \Rightarrow Q$$
$$\neg Q, P \vee Q \Rightarrow Q$$
$$P \Rightarrow \neg\neg P$$
$$P \rightarrow Q \Rightarrow \neg Q \rightarrow \neg P$$

21) הוכח או הפרך את הטענות הבאות. במקרה של הוכחה השתמש רק בזהויות לוגיות.

כתב ופתר - טל פלדמן ©
שיעורים פרטיים לבודדים ולקבוצות 054-7599493

תרגילים בנושא קבוצות

תרגילי מבוא (מסומנים באותיות אנגליות קטנות.)

a. לגבי כל אחד והממדים הבאים רשום ב-$\square$ את הסימנים המתאימים $\in,\notin,\subseteq,\subset,\not\subseteq$ תיתכן יותר מתשובה אחת.

במקרה שרשמת את הסימן $\not\subseteq$ נמק את תשובתך.

א. $1\square\{1,\{1\}\}$ ב. $\{1\}\square\{1,\{1\}\}$ ג. $\{8,\emptyset\}\square\{1,2,8\}$ ד. $\emptyset\square\{1,2\}$ ה $\emptyset\square\{\emptyset,1,2\}$

ו. $\{2\}\square\{\{1,\{2\}\}\}$ ז. $\{2\}\square\{2,\{2,\{2\}\}\}$ ח. $\{2\}\square\{2,\{2\},\{\{2\}\}\}$ ט. $\{2\}\square\{2,\{2,\{2\}\},\{2\}\}$

י. $\{\{2\},\emptyset\}\square\{2,\{2\},\{\{2\}\}\}$ יא. $\emptyset\square\{1,\{\emptyset\}\}$ יב. $\{\emptyset\}\square\{1,\{\emptyset\}\}$ יג. $\{1,2\}\square\{1,\{2\}\}$

יד. $1\square\mathbb{N}$ טו. $\{1\}\square\mathbb{N}$ טז. $1\square\{\mathbb{N}\}$ יז. $\{1\}\square\{\mathbb{N}\}$

b. עבור $A=\{1,2,3\},B=\{3,4,5\},C=\{1,4,6\}$ חשב את הקבוצות הבאות.

א. $(A\cup C)\setminus B$ ב. $(A\cap B)\cup C$ ג. $A\cap(B\cup C)$ ד. $P(A)$ ד. $C\setminus A$ ה. $P(C\setminus A)$

c. עבור $A=\{1,2,3\},B=\{3,4,5\},C=\{1,4,6\}$ ענה על השאלות הבאות.

א. האם $B\subseteq C$ ב. האם $\{1\}\subseteq B$? ג. האם $\{1\}\subseteq A$ ד. האם $\{1\}\in P(A)$? ה. האם $\{1\}\subseteq P(A)$?

ו. האם $\{\{1\}\}\subseteq P(A)$ ז. האם $\{\{1\},\emptyset\}\subseteq P(A)$

d. עבור $C=\{3,\{3\},\{\emptyset,3\}\}$ $B=\{\{3\},\{4,\emptyset\}\}$ $A=\{3,\{\emptyset\}\}$ רשום את הקבוצות הבאות.

א. את $P(C)$ ואת $P(B)$ ואת $P(A)$

ב. $P(A)\cap B$ ואת $P(A)\cap A$ ואת $P(C)\cap C$ ואת $C-P(C)$

e. $B=\{1,\emptyset\}$, $A=\{\emptyset,\{\emptyset\}\}$

א. רשום את $P(A)$ ואת $P(B)$

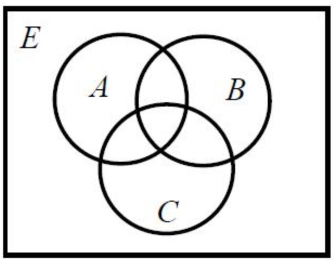
ב. רשום את $P(A)-P(B)$ ואת $P(B)-P(A)$

ג. $P(A)-A$ ואת $P(A)-\{A\}$

f. רשום את $P(\emptyset)$ ואת $P(P(\emptyset))$ ואת $P(P(P(\emptyset)))$

g. עבור $A=\{1,\{3,*\},\emptyset\},B=\{4,\emptyset\}$ חשב את הקבוצות הבאות:

א. $A\cup B$ ב. $A\cap B$ ג. $A-B$ ד. $B-A$ ה. $A\oplus B$



h. באיור שלפניך דיאגרמת וון . קווקו את השטח המתאר את הקבוצות הבאות.

א. $(A-B)-C$ ב. $A-(B-C)$ ג. $A\cap B^c$ ד. $(A\cap B^c)\cup(C\cap A^c)$

ה. $(A\cap B)\cap C$ ו. $A\cap(B\cap C)$ ז. $(A\cup B)\cup C$ ח. $A\cup(B\cup C)$

i. הוכח או הפרך את השיוויונות הבאים בעזרת טבלאות אמת

א. $(A\cap B)\cup C=A\cap(B\cup C)$ ב. חוק הפילוג $A\cap(B\cup C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

j. נגדיר 5 קבוצות A_i $i=1,2,3,4,5$ באופן הבא: $A_n=\{x\in\mathbb{N}\,|\,n<x\leq 2n\}$

חשב את הקבוצות הבאות. א. $\bigcup_{k=1}^{5}A_k$ ב. $\bigcap_{k=1}^{5}A_k$ ג. $\bigoplus_{k=1}^{5}A_k$

k. חזור על שאלה 6 עבור $A_n=\{x\in\mathbb{R}\,|\,n<x\leq 2n\}$

l. נגדיר $A_k=\{x\in\mathbb{R}\,|\,5\leq x\leq 2k+3\}$ ונגדיר $B_k=A_{k+1}-A_k$

א. חשב את A_i ואת B_i עבור $i=1,2,3,4$

ב. חשב את $\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k$ ואת $\bigcup_{k=1}^{\infty}B_k$

<u>תרגילים תיאורטיים</u>

1) לכל אחת מהטענות הבאות, אם הטענה נכונה אז ציין רק שהטענה נכונה ואם הטענה אינה נכונה אז ציין שהטענה לא נכונה ותן דוגמה נגדית והראה כי הדוגמה שנתת באמת מהווה דוגמה נגדית. ערך רב יותר יש לדוגמה מינימלית. (בדוק האם בדוגמה שנתת יש פרטים מיותרים והסר אותם).

את הטענות הנכונות מבין 10-17 נסה להוכיח. רצוי להוכיח גם את טענה 9) בה נשתמש יותר מאוחר להוכחת תכונות של קבוצת חזקה

א) אם $x\notin A$ אז $x\notin A\cup B$.

ב) אם $x\notin A\cup B$ אז $x\notin A$

ג) אם $x\notin A$ אז $x\notin A\cap B$.

ד) אם $x\notin A\cap B$ אז $x\notin A$

ה) אם $x\notin A$ אז $x\notin A-B$

ו) אם $x\notin A-B$ אז $x\notin A$

ז) אם $x\in B$ אז $x\notin A-B$.

ח) אם $x\notin A-B$ אז $x\in B$

ט) $A\subseteq B\cap C \;\Leftrightarrow\; (A\subseteq B \wedge A\subseteq C)$

י) $A\subseteq B\cup C \;\Leftrightarrow\; (A\subseteq B \vee A\subseteq C)$

יא) אם $A=A\cup B$ אז $A\subseteq B$

יב) אם $A=A\cup B$ אז $B\subseteq A$

יג) אם $A=A\cap B$ אז $A\subseteq B$

יד) אם $A=A\cap B$ אז $B\subseteq A$

טו) אם $A\subseteq B$ אז $A=A\cup B$

טז) אם $B\subseteq A$ אז $A=A\cup B$

יז) אם $A\subseteq B$ אז $A=A\cap B$

יח) אם $B\subseteq A$ אז $A=A\cap B$

יט) $x\notin A-B \Leftrightarrow x\notin A$

כ) $x\notin A-B \Leftrightarrow x\in B$

כא) השלם $x\notin A-B \Leftrightarrow$ ________________

2) יהיו A,B,C קבוצות הוכח או הפרך כ"א מהטענות הבאות.

א) אם $A=A-B$ אז $B=\varnothing$.

ב) אם $A=A-B$ אז $A\cap B=\varnothing$.

ג) אם $A=A\cup B$ אז $A\cap B=B$.

ד) אם $B=A\cup B$ אז $A\cap B=B$.

ה) אם $A\cap B=A$ אז $A=A\cup B$.

ו) אם $A\cap B=B$ אז $A=A\cup B$.

ז) אם $A\cup B=A\cup C$ וגם $A\cap B=A\cap C$ אז $B=C$.

ח) $A\cup(B-C)=(A\cup B)-C$

ט) $A\cup(B-C)=(A\cup B)-(A\cup C)$

י) $(A\cup B)\cap C=A\cup(B\cap C)$

יא) $(A\setminus B)\setminus C=A\setminus(B\cup C)$

יב) $A\cap(B\Delta C)=(A\cap B)\Delta(A\cap C)$

יג) $(A-B)\cap(C-D)=(A\cap C)-(B\cup D)$

יד) א. $A\cap B\cap C\subseteq A\oplus B\oplus C$

ב. $A\oplus B\oplus C\subseteq A\cap B\cap C$

לפתרון מלא בסרטון וידאו היכנסו ל- www.GooL.co.il
כתב ופתר - טל פלדמן ©
שיעורים פרטיים לבודדים ולקבוצות 054-7599493

3) הוכח כל אחת מהטענות הבאות בדרך השלילה. **במקום הטענה אם α אז β מוכיחים אם $\neg\beta$ אז $\neg\alpha$.**

ויש לזכור תמיד שלהנחת השלילה $\neg\beta$ ולכל הנובע ממנה מתייחסים כנתון.

א) אם $A-(B-C)\subseteq(A-B)-C$ אז $A\cap C=\varnothing$

ב) אם $(A-C)\cup(C-B)\subseteq A\cap B$ אז $A\subseteq B$

ג) אם $(A\cup B)-C\subseteq A-B$ אז $(A-C)\cap B=\varnothing$

ד) אם $(C-A)\cup(B-C)\subseteq A-B$ אז $B\subseteq A$

ה) אם $A\subseteq A\Delta B$ וגם $B-C=B\Delta C$. אז $A\cap C=\varnothing$.

ו) אם $A\subseteq A\oplus B$ וגם $B-C\subseteq B\oplus C$ אז $A\cap C=\varnothing$

ועכשיו קצת על קבוצת חזקה.

4) הוכח או הפרך כ"א מהטענות הבאות.

א) $P(A\cup B)=P(A)\cup P(B)$

ב) $P(A)\cup P(B)\subseteq P(A\cup B)$

ג) $P(A\cap B)=P(A)\cap P(B)$

ד) $P(A)\cap A\neq\varnothing$

ה) $P(A)\cap A=\varnothing$.

ו) אם $\{A\}\subseteq P(B)$ אז $P(A)\subseteq P(B)$

את שתי הטענות הבאות הוכח בדרך השלילה

ז) **אם** $P(A)\subseteq P(A-B)$ **אז** $A\cap B=\varnothing$

ח) **אם** $P(A\cup B)=P(A)\cup P(B)$ **אז** $(A\subseteq B)\vee(B\subseteq A)$ (שאלה קשה).

5) משהו גם על מכפלות קרטזיות. (נצטרך את זה גם ליחסים)

א) $(A=B)\Leftrightarrow(A\times A=B\times B)$

ב) $((B=\varnothing)\vee(A=\varnothing)\vee(A=B))\Leftrightarrow(A\times B=B\times A)$

ג) הוכח כי לכל 4 קבוצות A,B,C,D מתקיים: $(A\cup B)\times C=(A\times C)\cup(B\times C)$

ד) אם $((A\times A)\cup(B\times B)=(C\times C))$ אז $(((B\subseteq A)\vee(A\subseteq B))\wedge(A\cup B\subseteq C))$

ה) הוכח כי לכל 4 קבוצות A,B,C,D מתקיים: $(A\cap B)\times(C\cap D)=(A\times C)\cap(B\times D)$.

6) הוכיחו או הפריכו: תהיינה A,B שתי קבוצות כלשהן ותהי $S\subseteq A\times B$ אז קיימות $C\subseteq A$ ו- $D\subseteq B$ כך ש- $S=C\times D$

7) הוכיחו או הפריכו: לכל שתי קבוצות A,B מתקיים: $\overline{A\oplus B}=\overline{A}\oplus\overline{B}$

8) הוכיחו או הפריכו: קיימות שלוש קבוצות A,B,C שלושתן לא ריקות ושונות זו מזו כך ש- $A\cup(B-C)\subseteq A\cap(B-C)$

9) תהיינה A,B,C קבוצות כלשהן. נתון $P(A)-P(B)=P(B)-\{\varnothing\}$ הוכח כי $B-A=B$

10) הוכח כי אם $A\Delta B\subseteq A\Delta C$ אז $A\cap C\subseteq B$

11) הוכח או הפרך: קיימות שתי קבוצות A,B כך ש- $|A\times B|=24$ וגם $|A\cap B|=5$

12) תהיינה A,B,C קבוצות כלשהן. נתון $A\cap B=\varnothing$ הוכח כי $(A\Delta C)\cup(B\Delta C)=A\cup B\cup C$

13) הוכח או הפרך: לכל שלוש קבוצות A,B,C $A\times(B\oplus C)=(A\times B)\oplus(A\times C)$

14) תן דוגמא לקבוצה A שמקיימת $A\cap P(A)\cap P(P(A))\neq\varnothing$

15) לכל שלוש קבוצות A,B,C מתקיים: $(A\cap B)\setminus C=(A\setminus(C\setminus B))$

לפתרון מלא בסרטון וידאו היכנסו ל- www.GooL.co.il
כתב ופתר - טל פלדמן ©
שיעורים פרטיים לבודדים ולקבוצות 054-7599493

תרגילים בנושא פונקציות

1) (חימום)

יהיו f ו- g הפונקציות מ- $\mathbb{N}$ ל- $\mathbb{N}$ המוגדרות כך:

$$f(n)=\begin{cases}\dfrac{n+1}{2} & \text{אם } n \text{ אי זוגי}\\ n-1 & \text{אם } n \text{ זוגי}\end{cases}$$

לכל $n\in\mathbf{N}$, $g(n)=2n-1$

הוכח או הפרך כל אחת מן הטענות הבאות:

I. f היא חד-חד-ערכית

II. g היא חד-חד-ערכית

III. f היא על $\mathbb{N}$

IV. g היא על $\mathbb{N}$

V. $f\circ g$ היא פונקצית הזהות על $\mathbb{N}$

VI. $g\circ f$ היא פונקצית הזהות על $\mathbb{N}$

2) לגבי כל אחת מהפונק' הבאות קבע האם היא חח"ע והאם היא על. נמק.

א. $f_1:(0,\infty)\to(0,2)$, $f_1(x)=\dfrac{2x}{x+3}$

ב. $f_2:(0,\infty)\to(0,\infty)$, $f_2(x)=x+\dfrac{1}{x}$

ג. $f_3:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f_3(x)=x-\dfrac{1}{x}$

ד. $f_4:P(\mathbb{R})\to P(\mathbb{R})$, $f_4(X)=X\cap\mathbb{Z}$

ה. $f_5:P(\mathbb{R})\to P(\mathbb{Z})$, $f_5(X)=X\cap\mathbb{Z}$

ו. $f_7:P(\mathbb{R})\to P(\mathbb{R})$, $f_7(X)=X\Delta\mathbb{Z}$

ז. $f_8:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, $f_8(n)=\textit{the sum of the digits of } n$

לפתרון מלא בסרטון וידאו היכנסו ל- www.GooL.co.il
כתב ופתר - טל פלדמן ©
שיעורים פרטיים לבודדים ולקבוצות 054-7599493

3) יהי $g: A \to B, f: B \to C$ שתי פונקציות (כמובן שבתנאים אלו $f \circ g: A \to C$) הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות (במקרה של הפרכה בחר $A = B = C = \mathbb{N}$)

א. אם f חח"ע וגם g חח"ע אז $f \circ g$ חח"ע._

ב. אם $f \circ g$ חח"ע אז f חח"ע.

ג. אם $f \circ g$ חח"ע אז g חח"ע

ד. אם f על וגם g על אז $f \circ g$ על.

ה. אם $f \circ g$ על אז f על.

ו. אם $f \circ g$ על אז g על.

ז. אם $f \circ g$ חח"ע וגם g על אז f חח"ע.

ח. אם $f \circ g$ על וגם f חח"ע אז g על.

ט. אם f לא חח"ע וגם g לא על אז $f \circ g$ לא חח"ע או $f \circ g$ לא על.

4) תהי A קבוצה כלשהי ותהיינה $f, g, h: A \to A$ הוכח או הפרך כ"א מהטענות הבאות.

א. אם $g \circ f = h \circ f$ אז $g = h$.

ב. אם $g \circ f = h \circ f$ וגם f על אז $g = h$.

ג. אם $g \circ f = h \circ f$ וגם f חח"ע אז $g = h$.

ד. אם $f \circ g = f \circ h$ אז $g = h$.

ה. אם $f \circ g = f \circ h$ וגם f חח"ע אז $g = h$.

ו. אם $f \circ g = f \circ h$ וגם f על אז $g = h$.

5) נתונות פונקציה $f: A \to B$ וקבוצות $C, D \subseteq A$.

א. הוכח כי $f(C \cap D) \subseteq f(C) \cap f(D)$.

ב. הוכח שאם f היא חד-חד-ערכית אז $f(C \cap D) = f(C) \cap f(D)$.

ג. הדגם קבוצות $C, D \subseteq \mathbb{N}$ ופונקציה $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ כך ש- f על וגם $f(C \cap D) \subset f(C) \cap f(D)$.

ד. הוכח כי $f(C \cup D) = f(C) \cup f(D)$

6) תהי A קבוצה ותהי $f:A\to A$ פונקציה הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות.

א. אם $f\circ f=f$ אז $f=I$.

ב. אם $f\circ f=f$ אז $f=I$ או ש- f היא פונקציה קבועה.

ג. אם $f\circ f=f$ וגם f חח"ע אז $f=I$

ד. אם $f\circ f=f$ וגם f על אז $f=I$

7) יהיו $f,g,h:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ הפרך כל אחת מהטענות הבאות. (שאלה קשה מאוד)

א. אם $f\circ g=f\circ h$ וגם f על וגם g,h חח"ע וגם אז $g=h$

ב. אם $g\circ f=h\circ f$ וגם f חח"ע וגם g,h על אז $g=h$.

ג. אם $f\circ f\circ f=I$ אז $f\circ f=I$

ד. אם $f\circ f\circ f=f\circ f$ אז $f\circ f=f$.

8) תהי A קבוצה ו- B תת קבוצה החלקית **<u>ממש</u>** ל- A. נתונות הפונקציות $f,g:P(A)\to P(A)$

המוגדרות באופן הבא: $g(X)=X\cap B$, $f(X)=A-X$ הוכח או הפרך: $f\circ g$ על.

9) הוכח או הפרך את הטענה הבאה: הפונקציה $f;\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ המוגדרת על-ידי

$f\left((x,y)\right)=(3x+4y,4x+5y)$ היא פונקציה הפיכה.

10) תהי $P_{even}(\mathbb{N})$ קבוצת כל התת קבוצות של $\mathbb{N}$ שעוצמתן זוגית. ותהי $P_{odd}(\mathbb{N})$ קבוצת כל התת קבוצות של $\mathbb{N}$ שעוצמתן אי זוגית. לדוגמה $\{1,3\}\in P_{even}(\mathbb{N}),\{1,3\}\notin P_{odd}(\mathbb{N})$ ולעומת זאת $\{2,4,6\}\notin P_{even}(\mathbb{N}),\{2,4,6\}\in P_{odd}(\mathbb{N})$. לכל קבוצה A סופית של טבעיים נסמן ב- $\max(A)$ את המספר הגדול ביותר ב- A וב- $\max(\varnothing)=0$ הוכיחו כי הפונקציה $f:P_{even}(\mathbb{N})\to P_{odd}(\mathbb{N})$ המוגדרת על ידי $f(A)=A\cup\max(A)$ היא חח"ע אך אינה על.

11) נגדיר פונקציה $F:\{0,1\}^{\mathbb{N}}\to P(\{0,1\}\times\{0,1\})$ באופן הבא:

$F(g)=\{(g(n),g(n+1))|n\in\mathbb{N}\}$ הוכי כי F אינה על.

12) נגדיר פונקציה $h:\mathbb{N}\to\mathbb{Z}$ כך: $h(x)=2x$ הוכח כי $\{f\circ h|f\in\mathbb{N}^{\mathbb{Z}}\}=\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$

13) נגדיר את היחס R מעל $P(\mathbb{N})$ באופן הבא: $ARB\Leftrightarrow\exists b\in B(\forall a\in A(a<b))$

בנה פונקציה $f:\mathbb{N}\to P(\mathbb{N})$ שמקיימת: $\forall x,y\in\mathbb{N}(x<y\leftrightarrow f(x)Rf(y))$

14) נתונות שלוש פונקציות $f,g,h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

הוכח כי אם $f\circ g$ חח"ע וגם $g\circ h$ חח"ע וגם $h\circ g\circ f$ על אז f,g,h שלושתן הפיכות.

15) בנה באופן מפורש תת קבוצה של $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ ששקולה ל-$\mathbb{N}$

16) נגדיר $F:\mathbb{N}^{\mathbb{R}}\to P(\mathbb{N})$ באופן הבא: $F(f)=\{n\in\mathbb{R}|f(x)=1\}$ הוכח כי F אינה חח"ע.

17) נגדיר פ ונקציה $F:\{0,1,2\}^{\mathbb{N}}\to P(\mathbb{N})$ באופן הבא: $F(f)=\{n\in\mathbb{N}|f(n)=0\}$

קבע האם F חח"ע ועל.

18) תהי $\mathbb{N}$ הטבעיים ותהי $B\subseteq\mathbb{N}$ תת קבוצה סופית לא ריקה נתונה.

דוגמה: עבור $B=\{1,2\}$ מתקיים: $f(\{2,3\})=\{3\},f(\{3,4\})=\{1,2,3,4\}$

א. הוכח כי אם $X\cap B=\varnothing$ אז $f(f(X))=X$.

ב. הוכח כי אם $B\subseteq X$ אז $f(f(X))=X$.

ג. הוכח כי אם X שייכת לתמונה של הפונקציה אז $f(f(X))=X$.

ד. האם הפונקציה חח"ע?

ה. האם הפונקציה על?

ו. מה העוצמה של התמונה של הפונקציה?

לפתרון מלא בסרטון וידאו היכנסו ל- www.GooL.co.il
כתב ופתר - טל פלדמן ©
שיעורים פרטיים לבודדים ולקבוצות 054-7599493